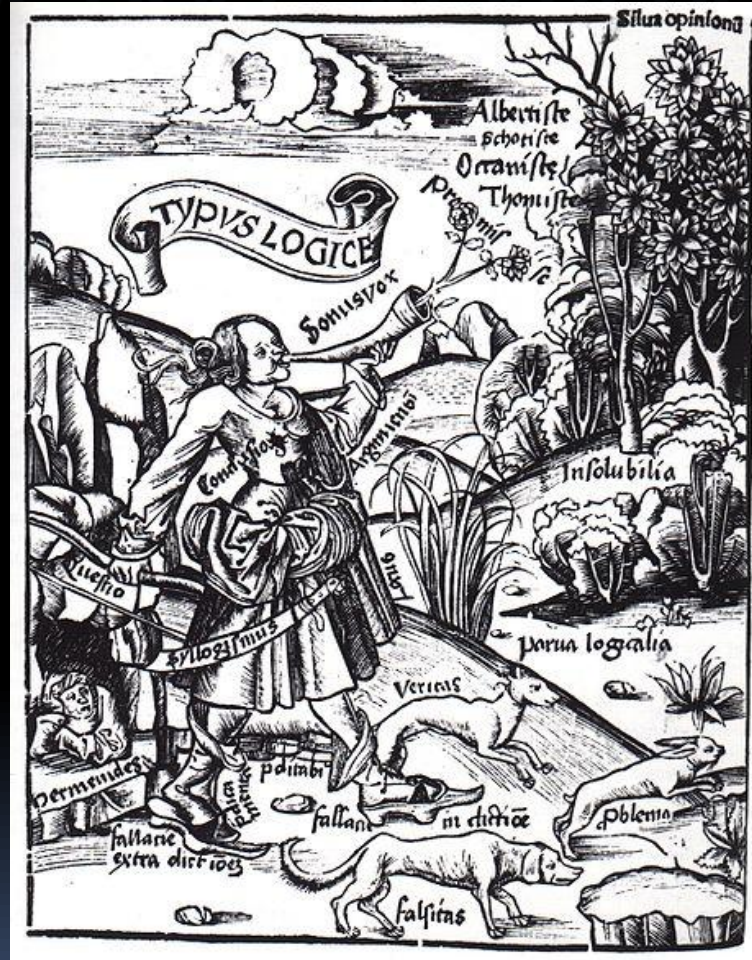


2. LOGIKAI ALAPFOGALMAK



GREGOR REISCH 1503

A logikai szerkezet

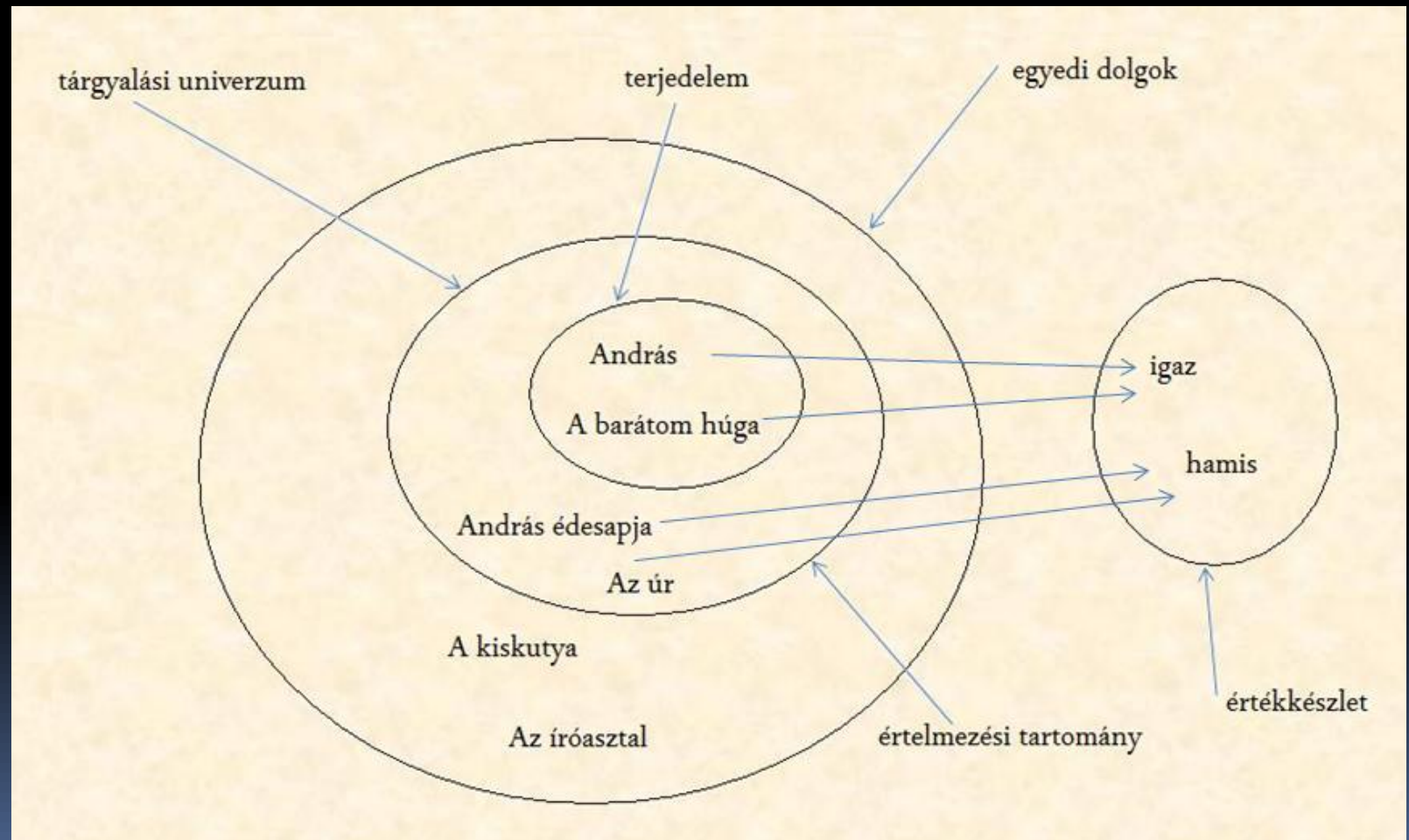
- Nyelvtani mondat ~ Logikai mondat (explicit és egyértelmű információk)
- Grammatika ~ Logikai grammatika (a felépítés szabályai → *logikai szintaxis*)
- A logikai mondatok alkatrészei:
 - **Logikai alkatrészek** (logikai jelek/konstansok)
 - **Nem-logikai alkatrészek** (betűjelek) = paraméterek

→ *formális logika*

Nem-logikai alkatrészek

- Grammatikai → **alany** – **állítmány**
- Frege – Russell → **argumentum** – **függvény**
 - **subjectum** (individuumnév)
 - **predikátum** (függvényként működik)
 - lehet összetett vagy bővített is
 - argumentuma: az individuumnév
 - argumentumszám
 - tárgyalási univerzuma: amire kiterjed
 - terjedelme (extenziója): amire igaz

„András és a barátom húga ír”



Jelölések

- **paraméterek:**

- mondatparaméterek: p, q, r
- névparaméterek: a, b, c
- individuumváltozók: x, y, z
- predikátumparaméterek: F, G, H
- egy p logikai mondat felbontása: aF , vagy xG
- formulák („blanketták”): A, B, C pl.: $(... \& ...)$
- premisszahalmaz: P , a levont konklúzió: K

- **segédjelek:**

- Indexálás pl.: p_1, p_2, p_3
- összetartozó kifejezések (...)
- premisszahalmaz $\{ ... \}$

Funktorok

- Logikai funkcióval bíró nyelvi eszközök
- → **igazságfüggvényként működik**
 - **Predikátum** = logikai név → logikai mondat
pl. 'Péter fut' → ... **FUT**
 - **Névfunktor** = név → név
pl. 'Péter anyja' → ... **ANYJA**
 - **Mondatfunktor** = mondat → mondat
pl. 'Esik az eső és süt a Nap.' → ... **ÉS** ...
- Általános jellemzők:
 - argumentumhely, argumentumszám
 - tárgyalási univerzum, terjedelem (extenzió)

Logikai alkatrészek

- **Mondatfunktorkok:** Nyelvi alkatrészekből (mondatokból) logikai struktúrát képeznek
- Egy vagy több állításból képez újabb állítást oly módon, hogy az eredmény (a kimenet) igazságértékét a bemeneti értékek igazságértékei határozzák meg
- = logikai szavak, jelek, konstansok

Konstans-kombinációk 1. (monadikus funktorok)

p	K_1	K_2	K_3	K_4
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

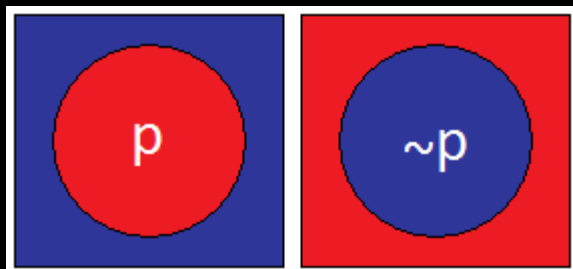
K_1 tautológia (igaz-gép) —

K_4 ellentmondás (hamis-gép)

K_2 identitás — K_3 negáció

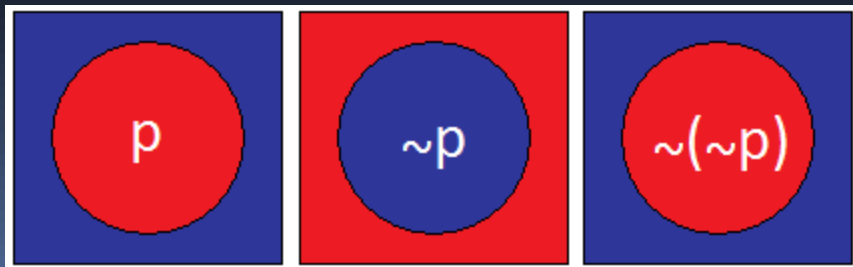
Negáció ($\sim p, \neg p, \bar{p}, Np$)

p	$\sim p$
1	0
0	1



Természetes nyelvi
megfelelője:
'nem', 'nem igaz, hogy'

- Igazságfüggvényként az igazságértékeket fordítja meg
- Egyargumentumú mondatfunktork
- Külső negáció – belső negáció
- Monadikus és szimmetrikus:



p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
1	0	1
0	1	0

Konstans-kombinációk 2. (diadikus funktorok)

p	q	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9	K_{10}	K_{11}	K_{12}	K_{13}	K_{14}	K_{15}	K_{16}
1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0

K_1 tautológia (igaz gép) — K_{16} ellentmondás (hamis gép)

K_2 alternáció — K_{15} negált alternáció = sem-szem funktor

K_4 kondicionális — K_{13} negált kondicionális =
összeférhetetlenség

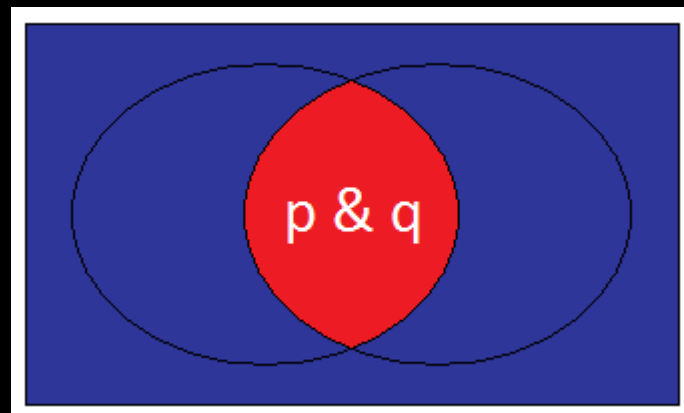
K_5 negált konjunkció = Sheffer-funktor — K_{12} konjunkció

K_8 bikondicionális — K_9 kizáró vagylagosság

Konjunkció ($p \& q, p \wedge q, pq$, Kpq)

p	q	p & q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

&	1	0
1	1	0
0	0	0



- Természetes nyelvi megfelelője: 'és'
- **Kétargumentumú** mondatfunktork: **diadikus** logikai művelet
- **Kimenetének igazságértéke** abban az esetben **igaz**, ha **mindkét bemenete igaz**; minden más esetben pedig hamis:
- Igazságfüggvényként az igazságértékeket kapcsolja össze
- **Kommutatív**: $p \& q \Leftrightarrow q \& p$
- **Asszociatív**: $(p \& q) \& r \Leftrightarrow (p \& r) \& q \Leftrightarrow p \& (q \& r) \Leftrightarrow p \& q \& r$

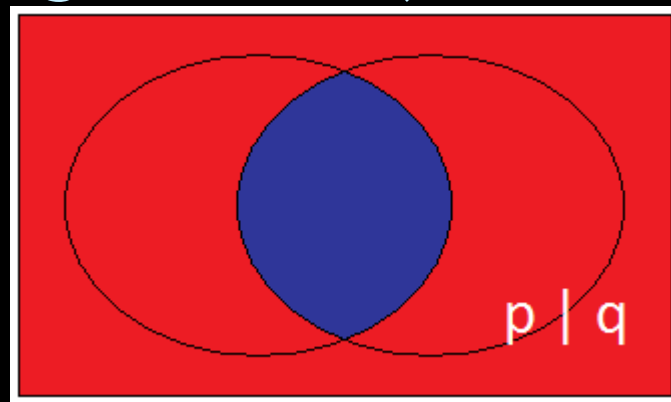
'&' versus 'és'

1. A természetes nyelvben az 'és'-nek a konjunkciótól eltérő jelentése is lehet: pl. **időbeni egymásutániség**:
Megebédeltünk és elmentünk kirándulni.
Elmentünk kirándulni és megebédeltünk.
Az időben egymásra következés nem kommutatív, nem érvényes a $p \& q \Leftrightarrow q \& p$ ekvivalencia
2. A természetes nyelvben a konjunkció **más nyelvi eszközökkel is kifejezhető**:
Ettünk is, ittunk is.
Bár csodállak, ámde nem szeretlek.

Sheffer-funktor (negált konjunkció)

p	q	$p \mid q$
1	1	0
1	0	1
0	0	1

$\mid$	1	0
1	0	1
0	1	1

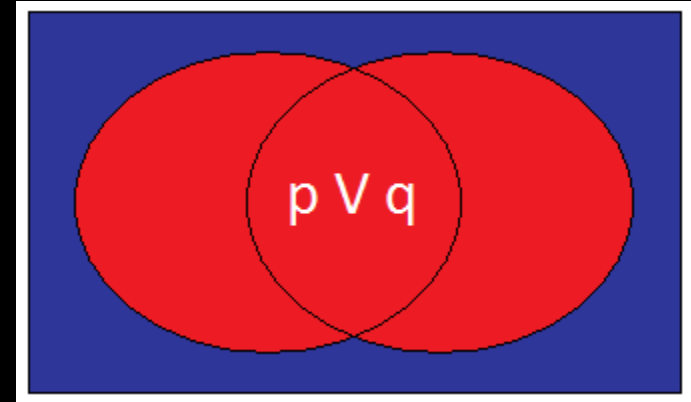


- Természetes nyelvben: összeférhetetlenség ('**vagy–vagy**')
- definíciója: $p \mid q \Leftrightarrow \sim (p \& q)$
- **Kétargumentumú** mondatfunktor: **diadikus** logikai művelet
- **Kimenetének igazságértéke** abban az esetben hamis, ha **mindkét bemenete igaz**; minden más esetben pedig igaz
- pl. Katira és Péterre mondva: „*Legfeljebb egyikük van otthon.*”

Alternáció ($p \vee q$, $p+q$, Apq)

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$\vee$	1	0
1	1	1
0	1	0

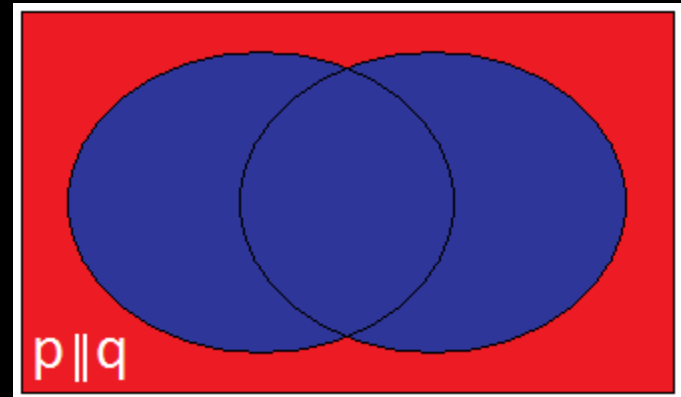


- Természetes nyelvi megfelelője: 'vagy', 'és/vagy'; 'vel' (latin)
- **Megengedő vagy**, megengedő **diszjunkció / adjunkció**
- **Kétargumentumú** mondatfunktork: **diadikus** logikai művelet
- **Kimenetének igazságértéke** abban az esetben **hamis**, ha mindkét bemenete hamis; minden más esetben pedig igaz
- **Kommutatív, asszociatív**

Sem–sem-funktor (negált alternáció)

p	q	$p \parallel q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$\parallel$	1	0
1	0	0
0	0	1

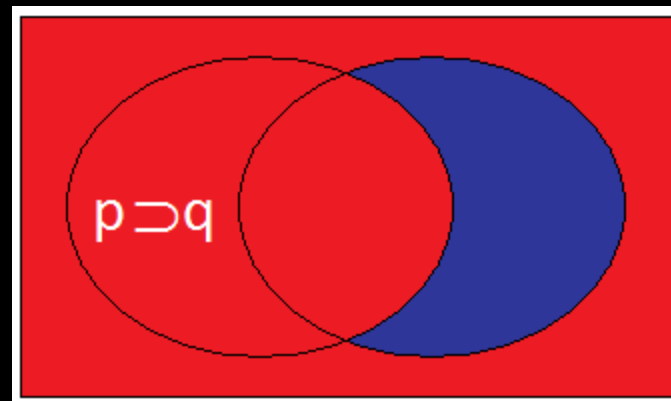


- Természetes nyelvi jelentése: ‘sem... sem...’
- definíciója: $p \parallel q \Leftrightarrow \sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \ \& \ \sim q$
- **Kétargumentumú** mondatfunktor: **diadikus** logikai művelet
- **Kimenetének igazságértéke abban az esetben igaz, ha mindkét bemenete hamis; minden más esetben pedig hamis**
- pl.: *Sem időm, sem energiám.*

Kondicionális ($p \supset q, p \rightarrow q, \text{Cpq}$)

p	q	$p \supset q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$\supset$	1	0
1	1	0
0	1	1



- Természetes nyelvi megfelelője: 'ha ..., akkor ...'
- **kondicionális** vagy **implikáció**: $p \supset q \Leftrightarrow \sim (p \ \& \ \sim q)$
- **Kétargumentumú** mondatfunktork: **diadikus** logikai művelet
- Kimenetének igazságértéke abban az esetben **hamis**, ha a *feltételes állítás* előtagja igaz és utótagja hamis

Kondicionális 1.

1. Nem kommutatív

Ha esik az eső, akkor sáros a mező.

Ha sáros a mező, akkor esik az eső.

p	q	$p \supset q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

2. $p \supset q$ kontraponáltja: $\sim q \supset \sim p$

kontrapozíció törvénye: $\Rightarrow(p \supset q) \Rightarrow \Rightarrow(\sim q \supset \sim p)$

Ha esik az eső, akkor sáros a mező.

Ha nem sáros a mező, akkor nem esik az eső.

3. Nem asszociatív

p: Esik az eső. $\leftarrow$ nem igaz

q : Sáros a föld. $\leftarrow$ igaz

r : Esernyő van nálam. $\leftarrow$ nem igaz

$(p \supset q) \supset r \rightarrow$ nem igaz

$p \supset (q \supset r) \rightarrow$ igaz

Kondicionális 2.

$\supset$	1	0
1	1	0
0	1	1

4. Leválasztási szabály:

modus ponens: ha igaz kondicionális előtagja igaz, akkor utótagjának is igaznak kell lennie

modus tollens: ha igaz kondicionális utótagja hamis, akkor előtagjának is hamisnak kell lennie

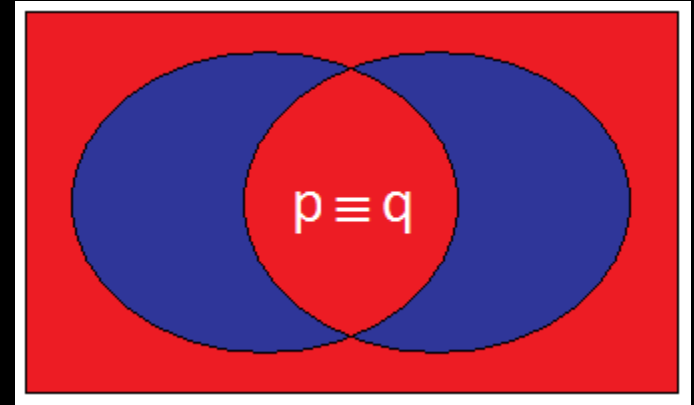
5. Láncszabály (tranzitív tulajdonság):

$$\Rightarrow(p \supset q) \ \& \ \Rightarrow(q \supset r) \Rightarrow \Rightarrow(p \supset r)$$

Bikondicionális ($p \equiv q, p \leftrightarrow q, Epq$)

p	q	$p \equiv q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$\equiv$	1	0
1	1	0
0	0	1

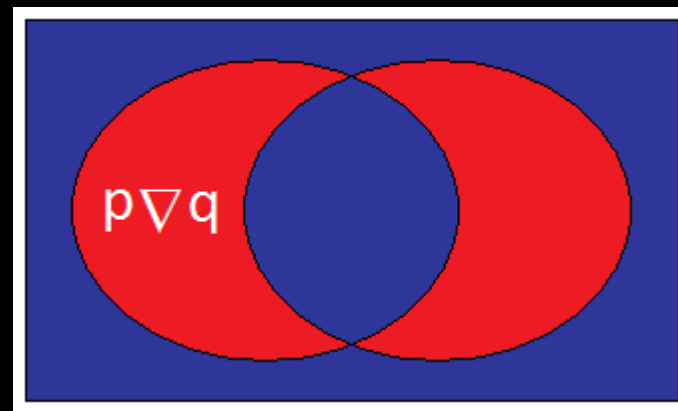


- Természetes nyelvi megfelelője: 'ha ..., akkor, és csak akkor ...'
- **bikondicionális** vagy **ekvivalencia**: $p \equiv q \Leftrightarrow (p \supset q) \& (q \supset p)$
- **Kétargumentumú** mondatfunktork: két mondatból állít elő egy újat (= **diadikus** logikai művelet)
- **Kimenetének igazságértéke abban az esetben igaz**, ha **bemenetei egyező igazságértékekkel rendelkeznek**
- **kommutatív és asszociatív**

Kizáró vagylogosság (negált bikondicionális)

p	q	$p \nabla q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

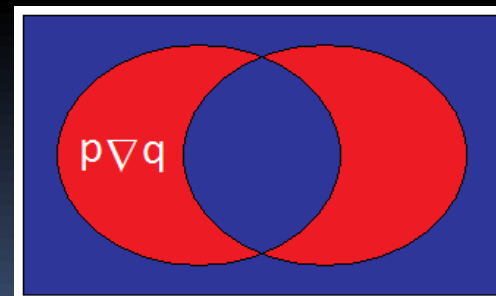
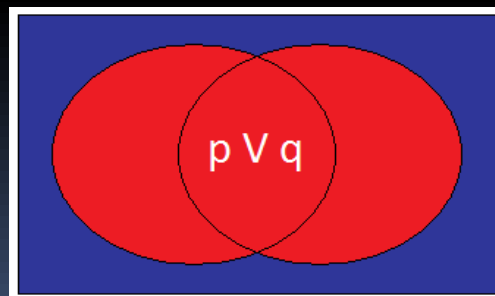
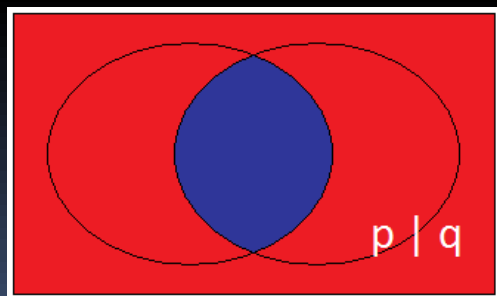
∇	1	0
1	0	1
0	1	0



- Természetes nyelvi megfelelője: 'vagy'; latinul: 'aut'
- $p \nabla q \Leftrightarrow (p \& \sim q) \vee (\sim p \& q)$
- **Kétargumentumú** mondatfunktork: diadikus logikai művelet
- **Kimenetének igazságértéke** abban az esetben igaz, ha bemenetei eltérő igazságértékekkel rendelkeznek

Vagy-típusok

1. Sheffer-funktor (negált konjunkció)
VAGY az egyik, VAGY a másik, VAGY egyik sem
2. Alternáció (megengedő diszjunkció)
VAGY az egyik, VAGY a másik, VAGY mindkettő
3. Kizárólagos vagylagosság (kizáró diszjunkció)
VAGY az egyik, VAGY a másik



Például

Btk. 172. § (1) Aki nem nyújt tőle elvárható segítséget sérült vagy olyan személynek, akinek az élete vagy testi épsége közvetlen veszélyben van, vétséget követ el, és két évig terjedő szabadságvesztéssel büntetendő.

'((valaki *nem igaz, hogy* segítséget nyújt) & (tőle elvárható módon)) & (olyan másvalakinek, aki (*már sérült*) ∇ ((*testi épsége* $\vee$ *élete*) közvetlen veszélyben van)) $\supset$ (bűnös segítségnyújtás elmulasztásában)',

$$(\sim p_1 \& p_2 \& (p_{31} \nabla (p_{321} \vee p_{322}))) \supset q$$

Azonosság

- Olyan kétargumentumú predikátum (funktör), amely két olyan nevet kapcsol össze, amelynek **jelölete** azonos
- Jele: = (olvasata: 'azonos')
- Olyan kétváltozós függvény, amely 'igaz' értéket rendel az azonos jelölletű individuumpárokhoz
- ' $a = b$ ', pl. „(Magyarország fővárosa) azonos (Budapesttel).”
- Az ilyen állítások az **azonossági állítások**

Azonosság

- Az azonosság alapvetően *önazonosság*: $\Rightarrow (a = a)$
- Azonosság a klasszikus logikában *csak individuumok között* állhat fenn
- Az azonosságot nem a nyelvi kifejezések egybeesése, hanem faktuális értékük (**jelöletük**) azonossága alapítja meg $\rightarrow$ használható az ' $a = b$ ' séma is, általánosan:
 $\{a = b, F(a)\} \Rightarrow F(b)$ ← Leibniz-törvény
„Bécs és Budapest világváros” = „Bécs és Magyarország fővárosa világváros” (ha Budapest Magyarország fővárosa)

Metalogikai jelek

- Nem a mondatok logikai struktúrájának jelölésére szolgálnak (mint a logikai műveletek)
- A logikai struktúrák/formulák/sémák közötti logikai viszonyok jelölésére szolgálnak
- Ezek **logikai törvények** → nincsenek természetes nyelvi megfelelői (kötőszavak)

Logikai ekvivalencia

- Jele: $\Leftrightarrow$
- $A \Leftrightarrow B$ jel két oldalán lévő kifejezések *igazságértékei azonosak*; logikailag ugyanazt fejezik ki:
ekvivalensek egymással
- **Szimmetrikus** reláció: ha $A \Leftrightarrow B$, akkor $B \Leftrightarrow A$
*Ha Jancsi házastársa Juliskának,
akkor Juliska is házastársa Jancsinak.*
- **Tranzitív** reláció : ha $A \Leftrightarrow B$ és $B \Leftrightarrow C$, akkor $A \Leftrightarrow C$
*Ha Péter testvére Pálnak és Pál testvére Jánosnak,
akkor Péter is testvére Jánosnak.*
- **Definíció jelölésére:** pl. $p \supset q \Leftrightarrow_{\text{df}} \sim(p \ \& \ \sim q)$.

Következményreláció

- Jele: $\Rightarrow$
- Az *érvényes logikai következtetést* jelöli
- A jel bal oldalán a premisszahalmaz, jobb oldalán a konklúzió van: $P \Rightarrow K$
- A premisszák halmaza maga után vonja, *implikálja* a konklúziót $\leftarrow$ *implikáció*
- Egyirányú reláció: *csak* a premisszákból következik a konklúzió, fordítva azonban nem

Logikai igazság

- Jele: $\Rightarrow$
- $A \Rightarrow$ jel baloldalán itt nem szerepel semmi
- Logikai igazság: ha *az állítás minden körülmények között igaz*, = nem premisszafüggő
- A klasszikus logika két alaptörvénye logikai igazság :
 - Kizárt harmadik törvénye: $\Rightarrow (p \vee \sim p)$
Vagy az állítás vagy annak negáltja szükségképpen igaz.
 - Ellentmondásmentesség törvénye: $\Rightarrow \sim (p \& \sim p)$
Nem lehet egyszerre igaz az állítás és annak negáltja.