3. Állítások és következtetések

Logikai szerkezet

- Tradicionális logika:
  - fogalom
  - Ítélet
  - következtetés

Fogalmak

- **Fogalom** = mentális reprezentáció
  = ami állítható
- Arisztotelész : Hermeneutika → **terminus**
  - tartalmi jegyek = ***comprehensio***
  - terjedelem = ***extensio***
- Frege : **jelölet**/**jelentés**
  - **jelölet** → Carnap : ***extenzió***
  - **Jelentés** → Carnap : ***intenzió***

Ítélet

- Fogalmakból összeállított logikai mondatok :
- Tradicionálisan :
  - **subjectum** (S) + **copula** (est) + **predicatum** (P)
  - Pl. „Az ember + (van) + halandó"
- „Ítélés" = „igazként állítás" *(aletheia)*
- *Logika* → igazságérték mondathoz rendelése
- **Kikötés**:
  - kizárt harmadik
  - ellentmondásmentesség
- **Nehézség***:* változók jelenléte → kötött – szabad

Meghatározatlan állítások

- **Meghatározott állítások:**
  - Egységként kezelhetőek (mondatparaméterek)
  - Kétértékűek: $\Rightarrow(p \nabla \sim p)$, $\Rightarrow\sim(p \,\&\, \sim p)$
    - „Ez teve.” ↔ „Ez nem teve.”
- **Meghatározatlan állítások:**
  - Ellentétesek, de egyidejűleg igazak lehetnek
    - „A teve (van) egypúpú.” ↔ „A teve (van) nem egypúpú.”
  - Ellentétes tartalmú ≠ negált:
    - $x(\sim F)$: „ A teve (van) nem egypúpú.”
    - $\sim(xF)$: „Nem igaz, hogy van egypúpú teve .”

A meghatározatlanság oka

- Névparaméterek helyett **individuumváltozók**
  - Az individuumváltozók ***(x, y, z)*** lehetnek:
    - **szabad**ok: nevekkel behelyettesíthetők („***aki*** mást megöl")
    - **kötött**ek: meghatározott személyre utalók („***aki*** melletted ül")
- **Kifejezések** (mondatok, sémák)
  - **nyitott kifejezés**: **szabad változók** szerepelnek benne
  - **zárt kifejezés**: kötött változók szerepelnek benne

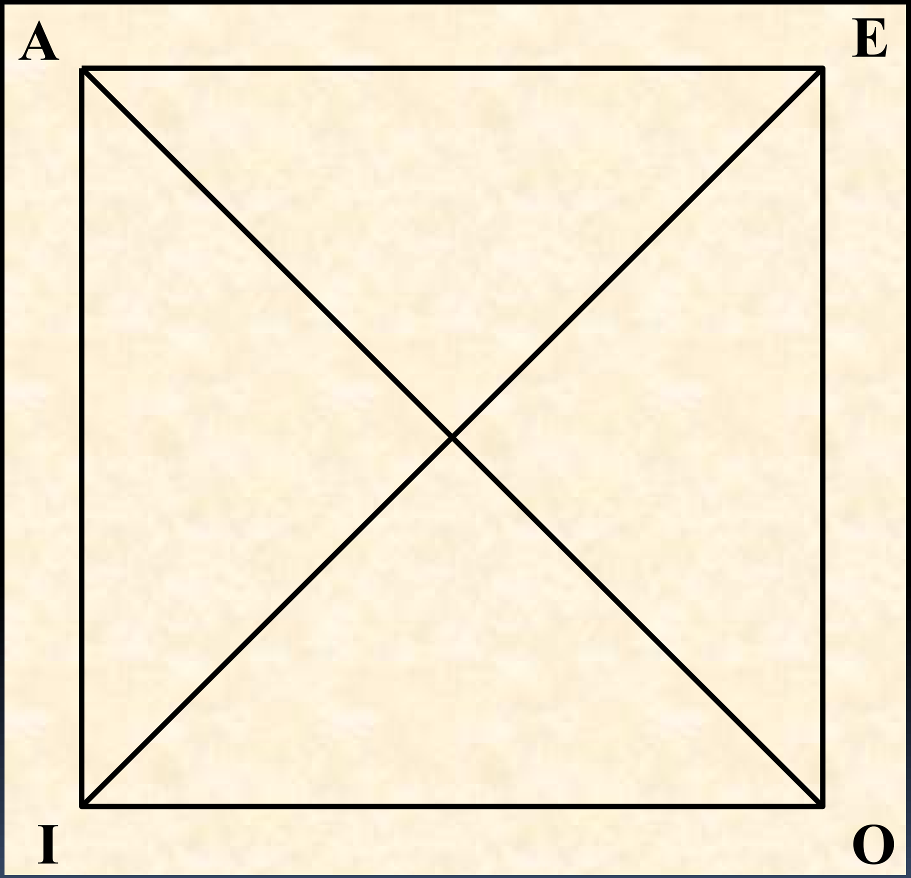
Kvantorok és kvantifikáció

- Nyitott mondatok **szabad változóinak** lekötése:
  - Nevekkel való **behelyettesítés**
  - **Operátorok** alkalmazása
- Operátorok: „minden”; „van olyan” („némely”)
  - *quantitas* (mennyiség) → **kvantor** → **kvantifikáció**
    - **Univerzális kvantor**: „minden …” → $\forall x$
      - $\forall x.F(x) \Leftrightarrow \forall x.[F(a_1)\ \&\ F(a_2)\ \&\ \ldots\ \&\ F(a_n)]$
    - **Egzisztenciális kvantor**: „van olyan …” → $\exists x$
      - $\exists x.F(x) \Leftrightarrow \exists x.[F(a_1) \vee F(a_2) \vee \ldots \vee F(a_n)]$

Kategorikus állítások

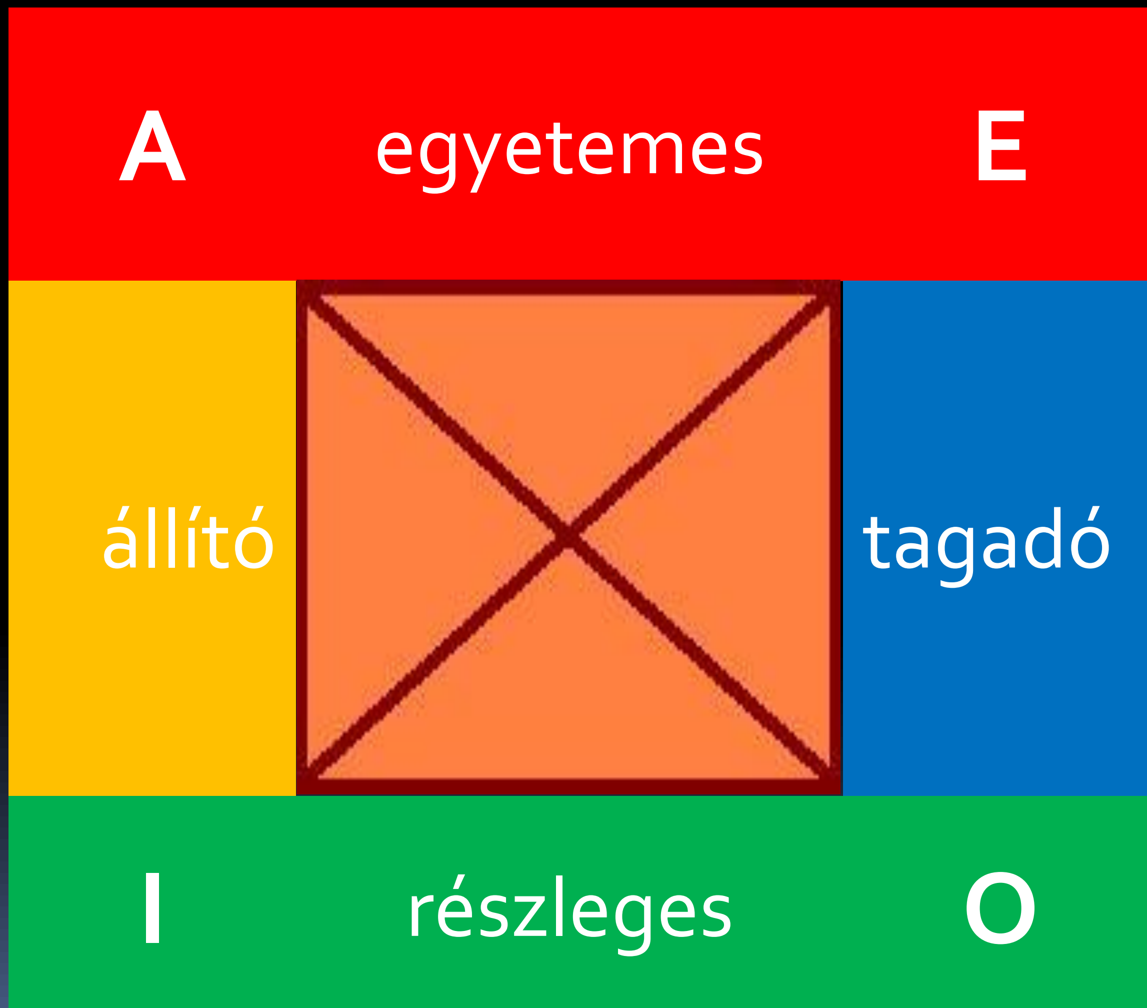
- Két-két univerzális/egzisztenciális állítás; két-két állítás/tagadás:
  1. $\forall x.[F(x) \supset G(x)]$: „Minden macska fekete.” (a)
  2. $\forall x.[F(x) \supset \sim G(x)]$: „Egyetlen macska …” (e)
  3. $\exists x.[F(x) \,\&\, G(x)]$: „Van olyan macska, …” (i)
  4. $\exists x.[F(x) \,\&\, \sim G(x)]$: „Van olyan macska, ….” (o)
- **Jelölések:**
  - affirmo (állítok) → (a, i)
  - nego (tagadok) → (e, o)
  - univerzális kvantifikáció → (a, e)
  - egzisztenciális kvantifikáció → (i, o)

A logikai négyzet (Boethius)



1. Az átlósan szemközti állítások (a-o, e-i) **kontradiktórius**ak, egymás negációi. **($p \nabla q$)**
2. Az a-e pár **kontrárius**: nem lehet mindkettő igaz, de lehet mindkettő hamis. **($p \mid q$)** Sheff.
3. Az i-o pár **szubkontrárius**: lehet egyszerre igaz, de nem lehet egyszerre hamis. **($p \vee q$)**
4. Az a-nak az i, az e-nek az o **alárendelt**je: ha az első igaz, szükségszerűen igaz a második is. **($p \supset q$)**

A négyzet logikája



Következményreláció

igaz premisszák →

a logika szabályainak betartása esetén

szükségszerűen

→ igaz konklúzió

- **Logikai következtetés:** állítások logikai szerkezete közötti olyan viszony feltárása, amelyben az egyik állítás a többi **logikai következményeként** szerepel ← ezt a viszonyt *következményrelációnak* nevezzük:

$$\mathbf{P} \Rightarrow K, \quad \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \Rightarrow B$$

Nevezetes következtetési sémák

- Elvileg végtelen számú következtetési forma lehet
- Néhányat már ismerünk:
  - **logikai igazság**: $\Rightarrow A$
    bármely premissza mellett érvényes következtetés
    pl.: $\Rightarrow (p \supset p)$, $\Rightarrow (p \nabla \sim p)$, $\Rightarrow \sim(p \,\&\, \sim p)$
  - **logikai ekvivalencia**: $A \Leftrightarrow B$
    a két formula kölcsönösen egymás következménye:
    $A \Rightarrow B$ és $A \Leftarrow B$, azaz $A \Leftrightarrow B$
- Vannak *hagyományosan* ***nevesített*** következtetési formák – középkori elnevezésekkel

Kategorikus szillogizmus

Olyan kétpremisszás következtetési forma, amely kategorikus állításokat (a, e, i, o) tartalmaz:

„Ha minden ***ember*** halandó, → premissa maior

és minden **görög** ***ember***, → premissa minor

akkor az összes **görög** halandó." → konklúzió

+középfogalom

$$\{ (G, H), (F, G) \} \Rightarrow (F, H)$$

$$\{ \forall x.[G(x) \supset H(x)], \forall x.[F(x) \supset G(x)] \} \Rightarrow \forall x.[F(x) \supset H(x)]$$

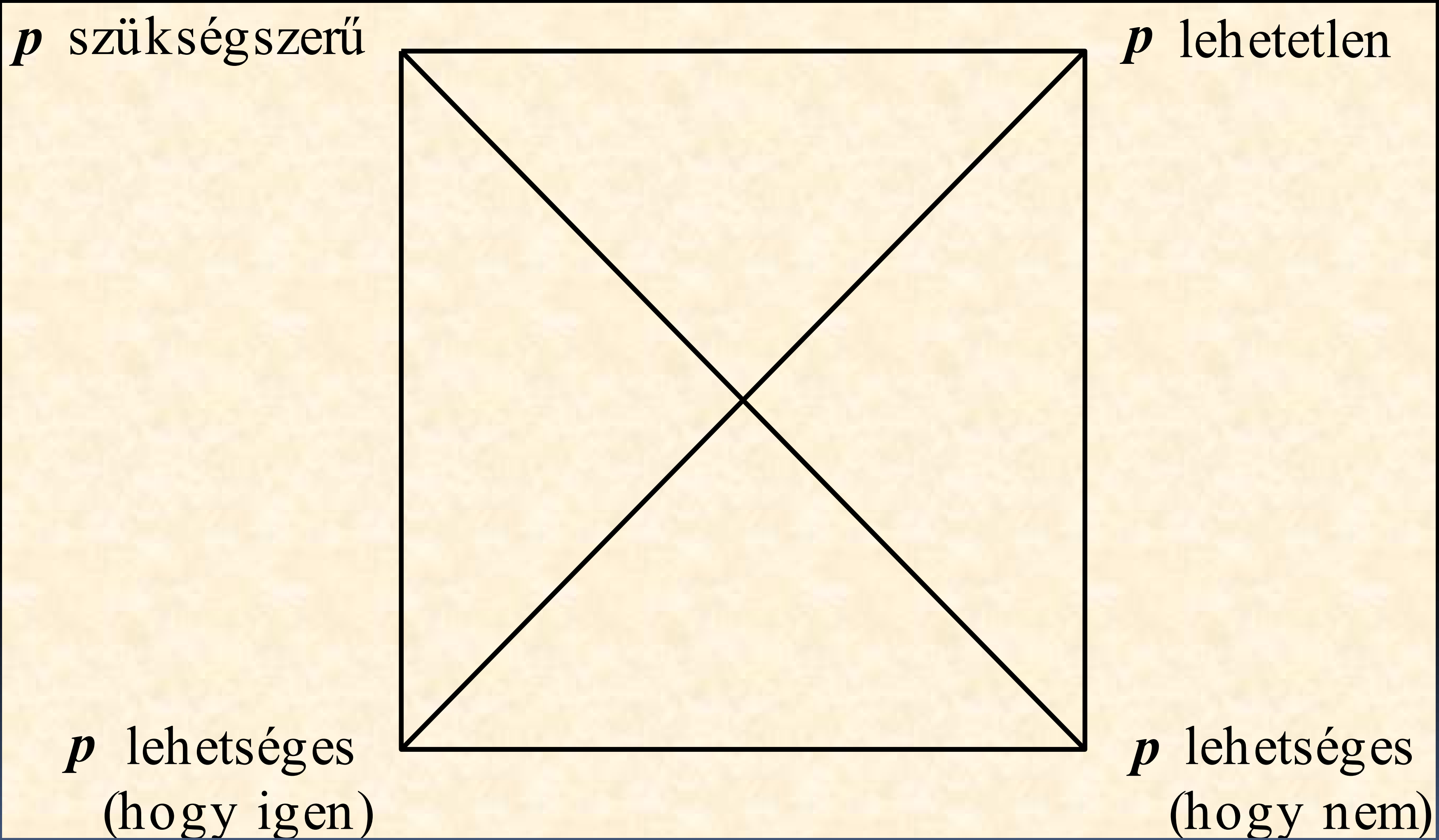
Hipotetikus szillogizmus

- **Kategorikus** szillogizmusok + **hipotetikus szillogizmusok**
  - **A tiszta hipotetikus szillogizmus**: mindkét premisszája és konklúziója is hipotetikus állítást tartalmaz
    „Ha a gyerek lázas, akkor beteg. – Ha beteg, akkor orvost kell hozzá hívni. – Ha a gyerek lázas, akkor orvost kell hozzá hívni."
  - Vagy pedig **felső tétele** tartalmaz hipotetikus állítást
    „Ha a gyerek álmos, aludnia kell. – A gyerek álmos. – Tehát a gyereknek aludnia kell."
  - **➔ a jogalkalmazás logikai szerkezete**

Modális logika

- **Modális logika**: a *klasszikus logika kiterjesztése*
- **Operátorok:** □ = **szükségszerűen** (igaz, hamis)
  ◊ = **lehetségsen** (igaz, hamis)
  → **modalitások**
- **Apodiktikus állítások**: szükségszerűen igaz/hamis.
- **Kontingens állítások**: esetlegesen igaz/ hamis.
- **Intenzionális** : abból, hogy egy állítás igaz/hamis, nem következik, hogy szükségszerűen igaz/hamis.
- **Szükségszerűség**:
  - **Logikai szükségszerűség**
  - **Ontológiai szükségszerűség**
  - **Analitikus szükségszerűség**

Modális logikai négyzet



Logikai négyzet

- Az átlósan szemközti állítások **kontradiktóriusak**
  „szükségszerű, hogy…” $\square p \Leftrightarrow {\sim}\lozenge({\sim}p)$
  negációja: *„lehetséges, hogy nem*…” $\lozenge({\sim}p)$
- „lehetetlen, hogy…” $\square{\sim}p \Leftrightarrow {\sim}\lozenge p$
  negációja: „lehetséges, hogy…” $\lozenge p$
- A *„szükségszerű”* ($\square p$) és a *„lehetetlen”* (${\sim}\lozenge p$)
  kontrárius: nem lehetnek egyszerre igazak:
  $\square p \Leftrightarrow {\sim}\lozenge({\sim}p)$, illetve ${\sim}\lozenge p \Leftrightarrow \square({\sim}p)$
- Az „esetleges” ($\lozenge({\sim}p)$) és a *„lehetséges”* ($\lozenge p$)
  szubkontrárius: nem lehetnek egyszerre hamisak:
  $\lozenge({\sim}p) \Leftrightarrow {\sim}\square(p)$, illetve $\lozenge p \Leftrightarrow {\sim}\square({\sim}p)$
- \+ **Alárendeltség** (szubordináció)

Lehetséges világok elmélete

- Az igazság modalitásai:

  szükségszerű – lehetséges – lehetetlen
- **Leibniz**: *számtalan lehetséges világ :* ***W1, W2 … Wn***
- Az emberi szellem törekvései: versek, utópiák, **jog**.
- **Lehetséges világ**: nem ütközik szükségszerűségbe.
  - **Logikai szükségszerűségbe:** *„minden ember halandó”* és *„nem minden ember halandó”*.
  - **Ontológiai szükségszerűségbe: nem érvényesül** pl. a tömegvonzás törvénye.
  - **Analitikus szükségszerűségbe:** pl. nem igaz, hogy *„minden férjnek van felesége”*.

Időlogika

- A klasszikus logika **kiterjesztése** az **időben**.
- **Szükségszerű** az, ami minden időben igaz.
- **Lehetséges** az, ami az idő valamely pillanatában igaz, vagy igazzá válhat.
- **Lehetetlen** az, ami egyetlen időben sem igaz.
- $p(t)$: nyitott mondat, *p* állítás valamely *t* időpillanatban igaz; az időparaméter behelyettesítésével zárt mondatot kapunk.
- Mondatfunktorok: **P** (past, múlt), **F** (future, jövő), (*a jelenre a mondatfunktor hiánya utal*).